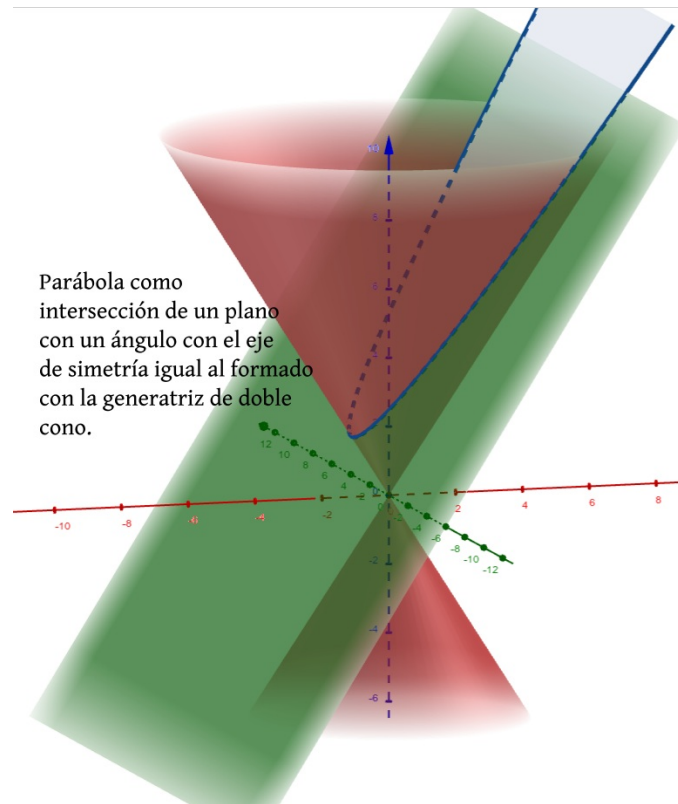


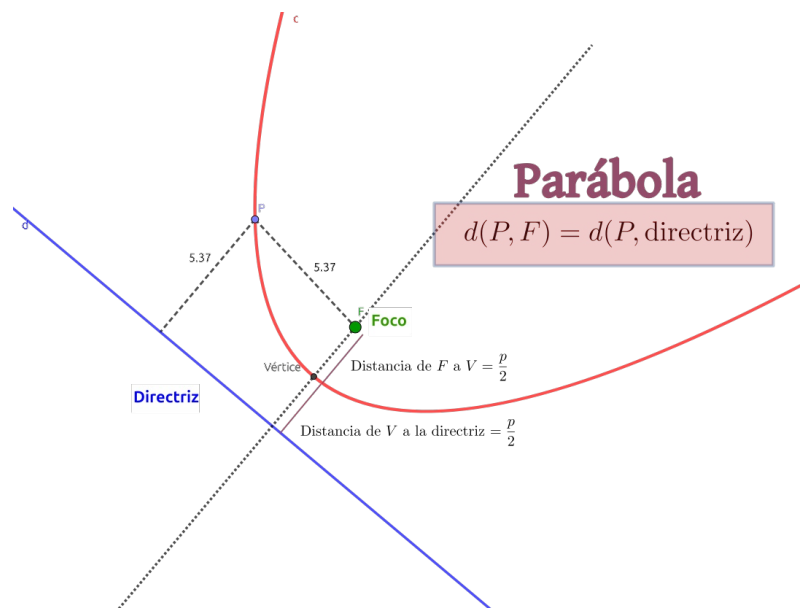
La Parábola

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que están a la misma distancia de una recta fija d , llamada directriz y de un punto fijo (no perteneciente a dicha recta), llamado foco, F .



En la imagen podemos observar como se obtiene una parábola con la intersección de un plano paralelo a la generatriz del doble cono y el propio cono.

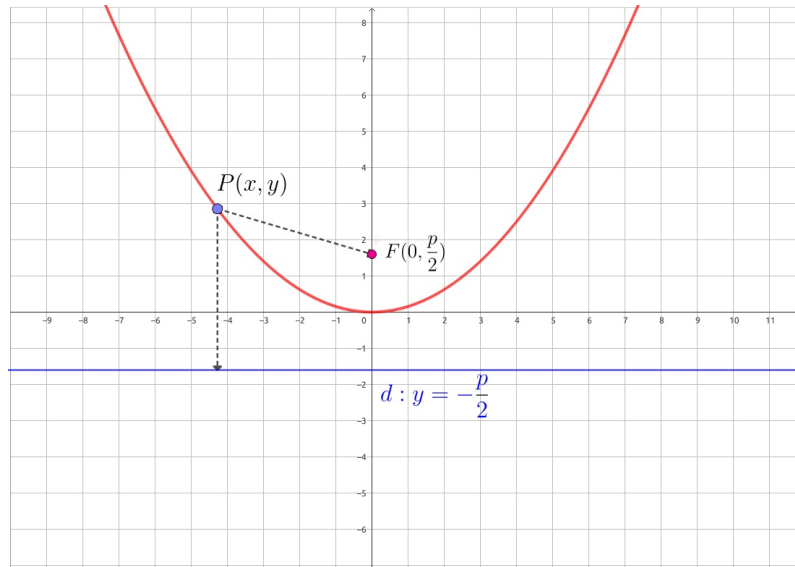
Para obtener las ecuaciones de la parábola debemos guiarnos por la definición del primer parrafo.



En esta imagen puedes observar como cualquier punto P de la parábola esta a la misma distancia de la recta directriz y de su foco. También puedes observar el vértice de la parábola (es el punto medio entre el foco y la directriz, denotado por V , designamos por p , a la distancia entre el foco y la directriz.

La parábola de la imagen anterior es una parábola inclinada. En este estudio matemático nos vamos a centrar en encontrar las ecuaciones de parábolas verticales y horizontales, suficientes para nuestro estudio.

Si tomamos como eje Y el eje de simetría de la parábola, situamos el vértice en el punto $(0,0)$ y tomamos el eje X paralelo a la recta directriz (pasando por el vértice $(0,0)$). Tendremos la siguiente situación:



De esta forma podemos establecer:

$$d(P, F) = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$d(P, d) = \frac{\left|y + \frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = y + \frac{p}{2}$$

y de aqui, igualando y elevando al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - py + p^2 = y^2 + yp + p^2$$

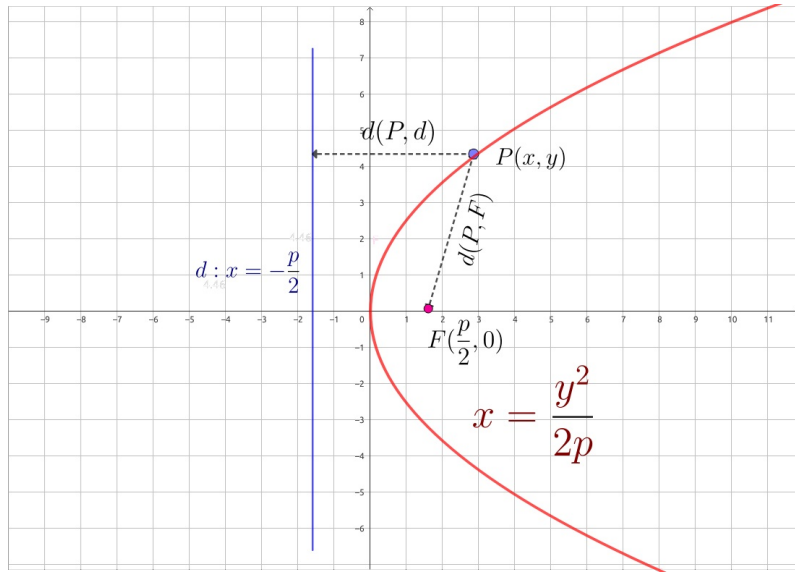
$$x^2 + y^2 - y^2 - py - py + p^2 - p^2 = 0$$

$$x^2 - 2py = 0$$

$$y = \frac{x^2}{2p}$$

Esto quiere decir que sabiendo el foco de una parábola vertical, con vértice en el origen podemos escribir inmediatamente su ecuación.

De forma simétrica, si la parábola es horizontal con vértice en el origen y foco en $F(\frac{p}{2}, 0)$. De forma análoga su ecuación resultará del intercambio de las variables x e y , $x = \frac{y^2}{2p}$.



Conceptos físicos de la trayectoria de un chorro de agua.

El estudio de la trayectoria de un chorro de agua es uno de los ejemplos más elegantes de la cinemática clásica. Aunque en la realidad intervienen factores como la resistencia del aire y la viscosidad, el modelo ideal nos permite entender la relación entre la fuerza (presión) y la geometría (ángulo).

Relación entre presión y velocidad.

El chorro de agua de una fuente describe una trayectoria parabólica. Antes de analizar la parábola, debemos saber a qué velocidad sale el agua. Según el **Principio de Bernoulli**, la presión interna del sistema se convierte en energía cinética. Para un orificio pequeño en un tanque o una boquilla, la velocidad de salida (v_0) se relaciona con la presión (P) mediante la fórmula:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(P - P_{\text{atm}})}{\rho}}$$

Donde:

- P es la presión interna.
- P_{atm} es la presión atmosférica.
- ρ (rho) es la densidad del agua (aprox. 1000 kg/m^3).

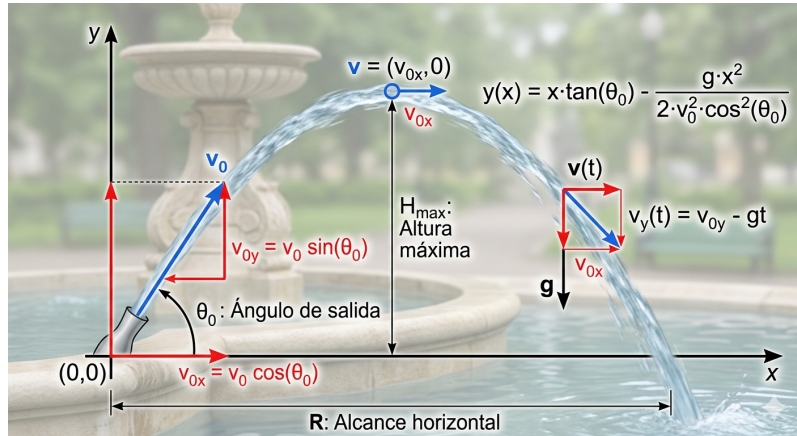
Vector velocidad. Ecuación explícita de la parábola.

Al igual que en un tiro parabólico, Una vez que el agua sale de la boquilla, el chorro se descompone en dos movimientos independientes: uno horizontal constante y uno vertical acelerado por la gravedad ($g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$).

El vector velocidad, tomando que forma un ángulo θ con la horizontal, se descompondrá en sus dos componentes:

- Componente horizontal: $x(t) = v_0 \cos(\theta)t$

- Componente vertical: $y(t) = v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$



Si despejamos t en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos(\theta_0)t \\ t &= \frac{x}{v_0 \cos(\theta_0)} \end{aligned}$$

sustituimos en la segunda y obtenemos:

$$\begin{aligned} y &= v_0 \sin(\theta_0) \frac{x}{v_0 \cos(\theta_0)} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\theta_0)} \right)^2 \\ y &= x \tan(\theta_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)} x^2 \end{aligned}$$

que es la ecuación explícita ($y = ax^2 + bx + c$) de una parábola vertical con las ramas hacia abajo que pasa por el origen $(0,0)$, donde

$$\begin{aligned} a &= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)} \\ b &= \tan(\theta_0) \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Alcance y altura del chorro de agua.

Con esta información podemos calcular el «alcance» (R), del chorro, así como la altura máxima del mismo (que se corresponde con la coordenada y del vértice de esta parábola).

Puntos de corte.

Como ya hemos visto uno de los puntos de corte es el origen de coordenadas, en $x=0$, que se corresponde con el punto de salida del chorro. En cualquier caso ambos se obtienen de las soluciones de la ecuación:

$$\begin{aligned} x \tan(\theta_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)} x^2 &= 0 \\ x \left(\tan(\theta_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)} x \right) &= 0 \end{aligned}$$

de este producto de factores igual a cero obtenemos que o bien uno de ellos es 0, ($x_1 = 0$), o bien el otro es 0

$$\begin{aligned}\tan(\theta_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)}x &= 0 \\ -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)}x &= -\tan(\theta_0) \\ \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)}x &= \tan(\theta_0) \\ x &= \frac{\tan(\theta_0) \cdot 2v_0^2 \cos^2(\theta_0)}{g}\end{aligned}$$

Como $\tan(\theta_0) = \frac{\sin(\theta_0)}{\cos(\theta_0)}$ y $2\sin(\theta_0)\cos(\theta_0) = \sin(2\theta_0)$, sustituyendo en la expresión anterior y simplificando obtenemos que el segundo punto de corte es:

$$x_2 = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$$

Esta es la expresión del alcance máximo del chorro $R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$

La altura máxima la encontramos en el vértice de la parábola. La coordenada x_v del vértice esta en $-\frac{b}{2a}$, donde como hemos visto

$$\begin{aligned}a &= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)} \\ b &= \tan(\theta_0)\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}x_v &= \frac{-\tan(\theta_0)}{-2\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)}} = \frac{2v_0^2 \cos^2(\theta_0) \tan(\theta_0)}{2g} = \\ &= \frac{2v_0^2 \cos^2(\theta_0) \frac{\sin(\theta_0)}{\cos(\theta_0)}}{2g} = \frac{v_0^2 2\sin(\theta_0)\cos(\theta_0)}{2g} = \\ &= \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{2g}\end{aligned}$$

que se corresponde como ya podíamos esperar con el punto medio del alcance máximo, es decir $\frac{R}{2}$.

La altura máxima se corresponde con la coordenada y del vértice que obtenemos sustituyendo x_v obtenida en la ecuación explícita de la parábola.

$$\begin{aligned}y_v &= x_v \tan(\theta_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)}x_v^2 = \\ &= \left(\frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{2g}\right) \tan(\theta_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)} \left(\frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{2g}\right)^2 = \\ &= \tan(\theta_0) \frac{v_0^2 \sin(\theta_0)\cos(\theta_0)}{g} - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta_0)} \left(\frac{v_0^2 \sin(\theta_0)\cos(\theta_0)}{g}\right)^2\end{aligned}$$

Si usamos que $\tan(\theta_0) \cdot \cos(\theta_0) = \sin(\theta_0)$, realizando operaciones y simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned} y_v &= \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g} = \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g} = H \end{aligned}$$

Resumen:

- Velocidad inicial, $v_0 = \sqrt{\frac{2(P - P_{\text{atm}})}{\rho}}$
- Alcance máximo (suponiendo velocidad v_0 y ángulo de salida θ_0)

$$\text{Punto: } \left(\frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}, 0 \right)$$

- Vértice (altura máxima, suponiendo velocidad v_0 y ángulo de salida θ_0)

$$\text{Punto: } \left(\frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{2g}, \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g} \right)$$

Por ejemplo, si la presión de salida del agua es de 2 bares y suponemos una presión atmosférica de 1 bar y tomamos la densidad del agua como $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Teniendo en cuenta que 1 bar = 100 000 Pascales (el pascal es la medida en las unidades adecuadas para realizar los cálculos, 1 Pa = 1 Newton/m²). Calculamos la velocidad de salida del agua:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(200000 - 100000)}{1000}} = \sqrt{200} \approx 14.14 \text{ m/s}$$

Si el ángulo de inclinación del chorro $\theta_0 = 45^\circ$, tendremos:

1. Alcance máximo (R):

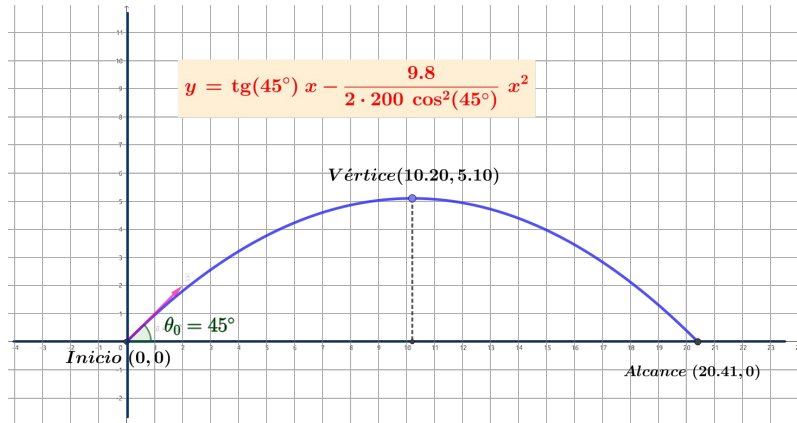
$$R = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2 \cdot 45)}{g} = \frac{200 \cdot 1}{9.8} \approx 20.41 \text{ m}$$

2. Vértice (altura máxima H):

$$\begin{aligned} x_v &= \frac{R}{2} = \frac{20.41}{2} = 10.20 \text{ m} \\ H = y_v &= \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(45)}{2g} = \frac{200 \cdot 0.5}{19.6} \approx 5.10 \text{ m} \end{aligned}$$

3. En una fuente real, la fricción en la tubería y la resistencia del aire (que crece con el cuadrado de la velocidad) harían que el alcance fuera un 20-30% menor. Sin embargo, matemáticamente, este es el límite teórico del sistema.

Veamos la gráfica de esta parábola.



Si variamos el ángulo de salida varía el alcance y la altura máxima. Lo vemos realizando las operaciones con distintos ángulos de salida, manteniendo la presión en los 2 bares.

Ángulo (θ_0)	Altura	Alcance
20°	$\frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2(20)}{2g} = 1,19 \text{ m.}$	$\frac{v_0^2 \cdot \text{sen}(2 \cdot 20)}{g} = 13,12 \text{ m.}$
30°	$\frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2(30)}{2g} = 2,55 \text{ m.}$	$\frac{v_0^2 \cdot \text{sen}(2 \cdot 30)}{g} = 17,67 \text{ m.}$
40°	$\frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2(40)}{2g} = 4,22 \text{ m.}$	$\frac{v_0^2 \cdot \text{sen}(2 \cdot 40)}{g} = 20,10 \text{ m.}$
50°	$\frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2(50)}{2g} = 5,99 \text{ m.}$	$\frac{v_0^2 \cdot \text{sen}(2 \cdot 50)}{g} = 20,10 \text{ m.}$
60°	$\frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2(60)}{2g} = 7,65 \text{ m.}$	$\frac{v_0^2 \cdot \text{sen}(2 \cdot 60)}{g} = 17,67 \text{ m.}$
70°	$\frac{v_0^2 \cdot \text{sen}^2(70)}{2g} = 9,01 \text{ m.}$	$\frac{v_0^2 \cdot \text{sen}(2 \cdot 70)}{g} = 13,12 \text{ m.}$

En esta tabla puedes observar como, siendo 45 grados cuando se obtiene un mayor alcance, los valores que están a la misma distancia de 45 (20 y 70, 30 y 60, 40 y 50 grados), consiguen un alcance idéntico.

Si se tuviera una limitación de anchura, o quisieramos un alcance concreto ($R < 20,41$), tan solo tendríamos que despejar el ángulo (θ_0) de salida en la ecuación:

$$\frac{v_0^2 \cdot \text{sen}(2\theta_0)}{g} = R$$

con esto obtendremos el ángulo adecuado para el alcance que deseamos obtener.

$$\frac{v_0^2 \cdot \text{sen}(2\theta_0)}{g} = R$$

$$\text{sen}(2\theta_0) = \frac{R \cdot g}{v_0^2}$$

$$2\theta_0 = \arcsen\left(\frac{R \cdot g}{v_0^2}\right)$$

$$\theta_0 = \frac{\arcsen\left(\frac{R \cdot g}{v_0^2}\right)}{2}$$